УДК 372.851:514

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ У СТАРШІЙ ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Пацановська Олена, Ключник Інна

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Ключник І.Г.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені В. Винниченка, м. Кропивницький, Україна

У статті розглянуто методичні особливості розв'язування геометричних задач із розділу «Координати і вектори у просторі»; розглянуто задачі шкільного курсу геометрії обов'язкового і підвищеного рівнів, у яких досліджені геометричні фігури, їхні властивості; до більшості задач наведено декілька способів розв'язання; відмічено позитивний вплив застосовуваних способів розв'язання задач на підвищення освітнього рівня школярів.

Ключові слова: *векторна алгебра, метод координат, конкурсні задачі шкільного курсу математики.*

Methodological features of study of coordinates and vectors in the senior specialized school

O. Patsanovska, I. Kliuchnyk

Scientific supervisor: Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent Kliuchnyk I.G.

Central Ukrainian State Pedagogical University named after V. Vynnychenko, Kropyvnytsky, Ukraine

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The article deals with methodological peculiarities of solving geometrical problems of the section "Coordinates and vectors in space"; the tasks of the school course of geometry of compulsory and advanced levels, in which geometric shapes and their properties are investigated; the most tasks include several ways to solve them; the positive impact of the methods used to solve the problems on raising the educational level of students was noted.

Keywords: *vector algebra, coordinate method, competitive problems of school mathematics course.*

Постановка проблеми. Одним з фундаментальних понять сучасної математики є поняття вектора та його координат. Еволюція поняття вектора відбувалася завдяки широкому використанню цього поняття у різних галузях математики, техніки, механіки. Роботи К. Гаусса, К. Весселя, Ж. Аргана з теорії комплексних чисел встановили зв'язок між комплексними числами і геометричними операціями над векторами (координатами) на площині. У середині XIX століття вектори і координати використовуються для вивчення властивостей тривимірного і *n*-вимірного векторних просторів. У кінці XIX століття починається бурний розвиток векторного числення. Векторна алгебра і векторні простори вивчаються у курсах «Лінійної алгебри», «Аналітичної геометрії», «Лінійного програмування» та ін. у закладах вищої освіти. У шкільному курсі геометрії десятого класу вивчається розділ «Координати і вектори у просторі». Вибір теми даної статті зумовлюється тим, що для учнів дуже складними є геометричні задачі взагалі, у тому числі задачі, пов'язані із застосуванням координат і векторів до їхнього розв'язування. Про це свідчать підсумки зовнішнього незалежного оцінювання з математики, які стверджують, що значна кількість учнів навіть не намагаються розв'язувати задачі векторної алгебри.

Аналіз досліджень і публікацій. Питання, пов'язані із застосуванням векторної алгебри до розв'язування математичних та фізичних задач досліджували Г. Апостолова, В. Бевз, Г. Бевз, Н. Владімірова, Т. Годованюк, А. Губанова, Ю. Захарійченко, О. Зеленяк, Л. Ізюмченко, О. Коломієць, Т. Махомета, З. Слєпкань, Л. Тополя, В. Швець, В. Ясінський та ін. Теоретико-методичними аспектами вивчення координат і векторів у шкільному курсі математики, векторної алгебри у ЗВО, у т.ч. із застосуванням ІКТ, займалися М. Бурда, І. Дереза, І. Дремова, О. Істер, Є. Нелін, С. Панова, Т. Поліщук, М. Працьовитий, Н. Тарасенкова, І. Тягай, С. Цуренко, Ю. Яременко та ін. Проблеми впровадження профільного навчання в Україні досліджували І. Акуленко, Г. Бевз, Н. Бібік, Б. Біляк, О. Губанова, С. Іванова, І. Ключник, Л. Липова, І. Лікарчук, Ю. Мальований, С. Максименко, В. Малишев, О. Носова, В. Павлюк, О. Панішева, П. Сікорський, З. Слєпкань, О. Чашечникова та ін. [1, 2, 3].

Метастатті: Проаналізувати задачі із геометрії, зокрема, геометричні задачі на застосування векторів і координат; висвітлити методичні аспекти розв'язування таких задач.

Виклад основного матеріалу (результатів) дослідження. Зауважимо, що без розуміння геометричної суті прямокутних координат у просторі не можна розв'язати жодної задачі з розділу «Координати і вектори у просторі», а тому доцільними є вправи такого типу (приклади 1, 2):

Приклад 1. Дано точки: $A(2; 0;–5)$, $B(0; 0; 7)$, $C(–2; 0; 0)$, $D(0; 2;–7)$, $E(1;–2; 4)$, $F(0;–6; 0)$, $G(–1; 2; 0)$, $H(1; 0; 4)$.

а) Які з точок належать координатним осям, яким осям?

б) Які з точок належать координатним площинам, яким площинам?

в) Чому дорівнює довжина відрізка EG?

г) Які координати має точка, що є серединою відрізка AD?

ґ) Які координати вектора AB?

Зауважимо, що після успішного виконання цієї вправи, де кожне питання передбачало рівно одну дію, доцільно спробувати ускладнити його, наприклад, таким чином:

д) Чи належить якій-небудь координатній осі середина відрізка AC? Якій осі?

е) Нехай точка O – середина відрізка AC, а точка M – середина відрізка EG. Що можна сказати про відрізок EG? Яким є його розташування відносно координатних осей? Координатних площин?

У класах з профільним навчанням геометрії після закріплення навичок розв'язування завдань основного рівня доцільно розглянути ускладнені завдання, наприклад, такі:

є) Чим особливі точки E і H? Що можна сказати про пряму EH?

ж) Якими мають бути координати точок X і Y так, щоб пряма XY була паралельна вісі абсцис? Вісі ординат? Вісі аплікат?

з) Чим особливі точки A і H? Що можна сказати про пряму AH? Як розташована пряма AH по відношенню до вісі аплікат?

і) Якими мають бути координати точок X і Y так, щоб пряма XY була перпендикулярна вісі абсцис? Вісі ординат? Вісі аплікат?

Зауважимо, що до завдань обов'язкового рівня відносяться задачі типу:

Приклад 2. Дано точку $A(3;–4;–5)$.

а) Запишіть координати проекцій точки A на координатні площини.

б) Запишіть координати проекцій точки *A* на координатні вісі.

в) На яких відстанях від координатних площин лежить точка *A*?

г) На яких відстанях від координатних осей лежить точка *A*?

ґ) На якій відстані від початку координат осей лежить точка *A*?

д) Запишіть координати точок, симетричних точці *A* відносно координатних площин.

е) Запишіть координати точок, симетричних точці *A* відносно координатних осей.

є) Запишіть координати точки, симетричної точці *A* відносно початку координат.

Зауважимо, що у класах з профільним навчанням геометрії доцільно сформулювати такі питання:

ж) Нехай *B* – точка, симетрична точці *A* відносно координатної площини *Oxy*. Яким має бути відрізок *AB* по відношенню до площини *Oxy*? По відношенню до вісі *Oz*? За яких обставин відрізок, заданий координатами своїх кінців, перпендикулярний до координатної площини *Oxy*, паралельний до вісі *Oz*, якими мають бути координати цих кінців відрізка? (абсциси і ординати рівні).

з) Нехай *C* – середина відрізка *AB*, де *B* – точка, симетрична точці *A* відносно координатної площини *Oxy*. Яким має бути розташування точки С по відношенню до координатної площини *Oxy*? Якими мають бути координати цієї точки? (апліката рівна нулю).

Це привчатиме учнів до самоперевірки, забезпечуючи кращу якість виконання завдань. Після цього доцільно розв’язати такі задачі.

Задача 1. Відстані від точки *K* до координатних площин дорівнюють 3 см, 4 см і 12 см. Знайдіть відстань від точки *K* до початку координат.

Розв’язання. Нехай відстані від точки $K(x, y, z)$ до координатних площин *Oxy*, *Oxz* і *Oyz*, взятих у такому порядку, дорівнюють, відповідно, 3 см, 4 см і 12 см. Це означає, що $|z|=3$, $|y|=4$, $|x|=12$. Відстань до початку координат $KO=\sqrt{|x|^2+|y|^2+|z|^2}=\sqrt{12^2+4^2+3^2}=\sqrt{144+16+9}=13$. Зауважимо, що якщо переставити площини (відстані до них) місцями, результат не зміниться.

Відповідь: відстань від точки *K* до початку координат дорівнює 13 см.

Наступні дві задачі дещо складніші з обчислювальної точки зору, адже потребують розв'язання систем рівнянь, у т.ч. і нелінійних.

Задача 2. Відстані від точки *K* до осей координат дорівнюють 11 см, 19 см і 20 см. Знайдіть відстань від точки *K* до початку координат.

Розв'язання. Нехай відстані від точки $K(x, y, z)$ до координатних осей Ox, Oy і Oz, взятих у такому порядку, дорівнюють, відповідно, 11 см, 19 см і 20 см.

Тоді $\begin{cases} y^2 + z^2 = 11^2, \\ x^2 + z^2 = 19^2, \\ x^2 + y^2 = 20^2, \end{cases}$, маємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Додавши усі рівняння, отримаємо рівняння–наслідок: $2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = 121 + 361 + 400$, звідки $2(x^2 + y^2 + z^2) = 882 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 441$, а тоді відстань від точки *K* до початку координат дорівнює $\sqrt{441} = 21$.

Зауважимо, що задача є геометрично коректною, тобто система має дійсні розв'язки: віднімаючи від останнього отриманого рівняння перше рівняння, отримаємо $x^2 = 320 > 0$, віднімаючи друге рівняння, отримаємо $y^2 = 80 > 0$, віднімаючи третє рівняння, отримаємо $z^2 = 41 > 0$.

Зауважимо також, що якщо переставити вісі (відстані до них) місцями, то результат (відстань від точки *K* до початку координат) не зміниться.

Відповідь: відстань від точки *K* до початку координат дорівнює 21 см.

Задача 3. Точка *C* – середина відрізка *AB* – належить вісі *Oy*. Знайдіть координати точки *C* та *k* і *m*, якщо $A(k; 5; m–1)$, $B(m; –3; 2k)$.

Розв'язання. Координати середини відрізка $C\left(\frac{k+m}{2}; 1; \frac{m-1+2k}{2}\right)$; абсциса і апліката цієї точки дорівнюють нулю, маємо систему: $\begin{cases} k + m = 0; \\ m - 1 + 2k = 0; \end{cases}$ розв'язавши яку отримаємо, що k=1, m= –1. Координати точки C(0; 1; 0).

Відповідь: C(0; 1; 0), k=1, m= –1.

Задача 4. На вісі абсцис знайдіть точку, відстань від якої до точки *A*(-5; 4; -8) дорівнює 12 од.

Розв'язання. Нехай шукана точка на вісі абсцис $M(x;\ 0;\ 0)$, тоді відстань $AM=\sqrt{(x+5)^2+(0-4)^2+(0+8)^2}=\sqrt{(x+5)^2+16+64}=\sqrt{(x+5)^2+80}=12$, розв'язуючи отримане рівняння, отримаємо, $(x+5)^2+80=144$, звідки $(x+5)^2=8^2$, або

$$\left[\begin{array}{l} x+5=8; \\ x+5=-8; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3; \\ x=-13; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(3;0;0); \\ M_2(-13;0;0). \end{array}\right.$$

Перевірка: 1) точки $M_1(3;\ 0;\ 0)$ і $M_2(-13;\ 0;\ 0)$ лежать на вісі абсцис.

2) $AM_1=\sqrt{(3+5)^2+(0-4)^2+(0+8)^2}=\sqrt{64+16+64}=\sqrt{144}=12$,

$AM_2=\sqrt{(-13+5)^2+(0-4)^2+(0+8)^2}=\sqrt{64+16+64}=\sqrt{144}=12$, відстані дорівнюють 12, тобто усі умови задачі виконуються.

Відповідь: $M_1(3;\ 0;\ 0)$, $M_2(-13;\ 0;\ 0)$.

Розглянемо приклади завдань на застосування координат та векторів до дослідження трикутників, чотирикутників, встановлення їхнього вигляду, у тому числі і завдання підвищеного і поглибленого рівнів на застосування координат та векторів.

Задача 5. Дано точки $A(2;\ -1;\ 3)$; $B(3;\ -2;\ -1)$; $C(4;\ 2;\ -5)$, $D(3;\ 3;\ -1)$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.

Розв'язання.

<u>1 спосіб</u>. Якщо у чотирикутника діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник є паралелограмом. Нехай точка O_1 є серединою відрізка AC (діагоналі), тоді координати $O_1(3;\ 0{,}5;\ -1)$. Нехай точка O_2 є серединою діагоналі BD, тоді координати $O_2(3;\ 0{,}5;\ -1)$. Оскільки $O_1=O_2$, то діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, а тому цей чотирикутник є паралелограмом.

<u>2 спосіб</u>. Якщо чотирикутник є паралелограмом, то у нього протилежні сторони і паралельні, і рівні, тобто вектори мають бути $\overline{AB}, \overline{DC}$ рівними. Обчислимо координати цих векторів: $\overline{AB}=(1;-1;-4)$, $\overline{DC}=(1;-1;-4)$. А тому чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.

Відповідь: $ABCD$ є паралелограмом.

Задача 6. Дано точки $A(1;3;4); B(2;0;1); C(5;3;2); D(4;6;5)$. Доведіть, що $ABCD$ – ромб.

Розв'язання.

<u>*1 спосіб*</u>. Одним з двох способів, описаних у попередній задачі, доведемо, що $ABCD$ є паралелограмом: нехай O_1 є серединою діагоналі AC, тоді координати $O_1(3; 3; 3)$; точка O_2 є серединою діагоналі BD, $O_2(3; 3; 3)$; $O_1=O_2$, отже, діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, а тому цей чотирикутник є паралелограмом. Або: $\overline{AB}=(1;-3;-3)$, $\overline{DC}=(1;-3;-3)$, вектори рівні, а тому чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом. Оскільки у паралелограма протилежні сторони рівні, тобто $AB=CD, AD=BC$, то для того, щоб довести, що цей паралелограм є ромбом, достатньо показати рівність його сусідніх сторін: $AB=\sqrt{1^2+(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9+9}=\sqrt{19}$, $BC=\sqrt{3^2+3^2+1^2}=\sqrt{9+9+1}=\sqrt{19}$. А тому у паралелограма <u>усі</u> сторони рівні, отже, він є ромбом, доведено.

<u>*2 спосіб*</u>. Одним з двох варіантів, описаних у попередньому способі розв'язання цієї задачі, обґрунтовуємо, що $ABCD$ є паралелограмом.

Якщо у паралелограма діагоналі перпендикулярні, то він є ромбом: вектори $\overline{AC}=(4;0;-2)$, $\overline{BD}=(2;6;4)$, вектори перпендикулярні, якщо скалярний добуток дорівнює нулю: $\left(\overline{AC}\cdot\overline{BD}\right)=(4;0;-2)\cdot(2;6;4)=8+0-8=0$, а тому $ABCD$ є ромбом.

<u>*3 спосіб*</u>. Одним з двох варіантів, описаних у першому способі розв'язання цієї задачі, обґрунтовуємо, що $ABCD$ є паралелограмом. Нехай $O(3; 3; 3)$ – точка перетину діагоналей. Тоді $AO=\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$, $BO=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$, AB ми рахували вище $AB=\sqrt{19}$. Оскільки $AO^2+BO^2=AB^2$ (теорема Піфагора), то трикутник AOB є прямокутним, причому $\angle AOB$ прямий, а отже, діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні, а тому $ABCD$ є ромбом.

Відповідь: $ABCD$ є ромбом.

Задача 7. Дано точки $A(0;2;2); B(2;3;1); C(4;2;4); D(2;1;5)$. Доведіть, що $ABCD$ – прямокутник.

Розв'язання.

<u>*1 спосіб*</u>. Одним з двох способів доводимо, що даний чотирикутник є паралелограмом:

а) O_1 – середина діагоналі AC, $O_1(2; 2; 3)$; O_2 – середина діагоналі BD, $O_2(2; 2; 3)$; $O_1=O_2$, отже чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.

б) $\overline{AB}=(2;\ 1;-1)$, $\overline{DC}=(2;\ 1;-1)$, вектори рівні, а тому чотирикутник *ABCD* є паралелограмом.

Якщо у паралелограмі діагоналі рівні, то він – прямокутник. Обчислимо довжини діагоналей паралелограма: $AC=\sqrt{4^2+0^2+2^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$ і $BD=\sqrt{0^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$. Оскільки у паралелограмі *ABCD* діагоналі рівні, то *ABCD* – прямокутник.

<u>*2 спосіб*</u>. Одним з двох способів, описаних вище, доводимо, що даний чотирикутник є паралелограмом.

Оскільки у *паралелограмі* протилежні кути рівні, а сусідні у сумі дають 180°, то достатньо показати, що один кут у цього паралелограма є прямим, інші кути виявляться автоматично прямими. А тому чотирикутник буде прямокутником. Вектори $\overline{AB}=(2;\ 1;-1)$, $\overline{BC}=(2;\ -1;\ 3)$ перпендикулярні, бо їхній скалярний добуток дорівнює нулю:
$(\overline{AB}\cdot\overline{BC})=(2;\ 1;-1)\cdot(2;\ -1;\ 3)=4-1-3=0$, а тому $\angle ABC$ – прямий, а отже *ABCD* є прямокутником.

<u>*3 спосіб*</u>. Спочатку обґрунтовуємо, то чотирикутник є паралелограмом.

Зауважимо, що можна довести також, що кут $\angle ABC$ – прямий, обчисливши довжини сторін *AB*, *BC*, *AC* і застосувавши теорему Піфагора: $AB=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$, $BC=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}$, *AC* рахували вище $AC=2\sqrt{5}$, виконується теорема Піфагора $AB^2+BC^2=AC^2$, а тому ΔABC є прямокутним, причому $\angle ABC$ прямий, а отже у паралелограмі дві сусідні сторони перпендикулярні, а тому *ABCD* є прямокутником.

Відповідь: *ABCD* є прямокутником.

Задача 8. Дано точки $A(1;\ 2;\ \sqrt{2})$; $B(2;\ 1;\ \sqrt{2})$; $C(2;\ 1;\ 0)$, $D(1;\ 2;\ 0)$. Доведіть, що *ABCD* – квадрат.

Розв'язання.

<u>*1 спосіб*</u>. O_1 – середина діагоналі *AC*, $O_1(1,5;\ 1,5;\ 0,5\sqrt{2})$; O_2 – середина діагоналі *BD*, $O_2(1,5;\ 1,5;\ 0,5\sqrt{2})$; $O_1=O_2$, отже чотирикутник *ABCD* є паралелограмом.

Довжини діагоналей паралелограма:
$AC=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+1+2}=2$ і $BD=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+1+2}=2$. Оскільки у паралелограмі *ABCD* діагоналі рівні, то *ABCD* – прямокутник.

У паралелограма протилежні сторони рівні, тобто $AB = CD$, $AD = BC$, щоб довести, що цей паралелограм є ромбом, покажемо рівність його сусідніх сторін: $AB = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$. А тому в *ABCD* усі сторони рівні, отже, він є ромбом.

Оскільки *ABCD* є прямокутником і ромбом, то він є квадратом, доведено.

<u>*2 спосіб*</u>. $\overline{AB} = (1;\ -1;\ 0)$, $\overline{DC} = (1;\ -1;\ 0)$. Вектори, що містять протилежні сторони чотирикутника *ABCD*, рівні, а тому *ABCD* є паралелограмом.

Вектори $\overline{AB} = (1;\ -1;\ 0)$, $\overline{BC} = (0;\ 0; -\sqrt{2})$ перпендикулярні, бо їхній скалярний добуток дорівнює нулю: $\left(\overline{AB} \cdot \overline{BC}\right) = (1; -1; 0) \cdot (0;\ 0;\ -\sqrt{2}) = 0 - 0 - 0 = 0$, а тому $\angle ABC$ – прямий і *ABCD* є прямокутником.

Оскільки у паралелограмі діагоналі перпендикулярні, то він є ромбом: вектори $\overline{AC} = (1; -1; -\sqrt{2})$, $\overline{BD} = (-1; 1; -\sqrt{2})$ перпендикулярні, бо скалярний добуток дорівнює нулю: $\left(\overline{AC} \cdot \overline{BD}\right) = (1;\ -1; -\sqrt{2}) \cdot (-1; 1; -\sqrt{2}) = -1 - 1 + 2 = 0$.

Оскільки *ABCD* є прямокутником і ромбом, то він є квадратом, доведено.

Відповідь: *ABCD* – квадрат.

Задача 9. Доведіть, що чотирикутник *ABCD* – рівнобічна трапеція, якщо *A*(6; –4; 2), *B*(1; –1; 4), *C*(–1; 4; 1), *D*(2; 6; –4).

Розв'язання. Якщо чотирикутник є трапецією, то дві протилежні сторони є паралельними, а дві інші – непаралельні. Для цього досить показати, що два вектори (протилежних сторін) є колінеарними (і нерівними): $\overline{AB} = (-5; 3; 2)$, $\overline{DC} = (3; 2; -5)$ (ці вектори не є колінеарними, адже координати непропорційні), а тому вони можуть лежати тільки на бічних сторонах трапеції; $\overline{BC} = (-2; 5; -3)$, $\overline{AD} = (-4; 10; -6)$ (ці вектори є колінеарними, координати пропорційні, $\overline{AD} = 2\overline{BC}$, вони нерівні, а тому *ABCD* – трапеція, основи якої *AD* і *BC*. Тоді бічні сторони цієї трапеції – *AB* і *CD*. Обчислимо їхні довжини. $AB = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 9 + 4} = \sqrt{38}$, $CD = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38}$, вони рівні, а тому трапеція *ABCD* є рівнобічною.

Відповідь: *ABCD* є рівнобічною трапецією.

Задача 10. Доведіть, що трикутник з вершинами у точках $A(1; 2; 2); B(3; 3; 1); C(5; 2; 4)$ – прямокутний. Обчисліть площу трикутника *ABC*.

Розв'язання.

1 спосіб. $\overline{AB}=(2;1;-1),\ \overline{AC}=(4;0;2),\ \overline{BC}=(2;-1;3)$. Обчислимо попарно скалярні добутки $(\overline{AB}\cdot\overline{AC})=(2;1;-1)\cdot(4;0;2)=8+0-2=6\neq 0$, $\angle BAC$ не є прямим (він гострий, бо скалярний добуток є додатним, обидва вектори виходять з вершини A); $(\overline{AB}\cdot\overline{BC})=(2;1;-1)\cdot(2;-1;3)=4-1-3=0$, вектори перпендикулярні, а тому кут B є прямим (насправді ми визначили не внутрішній кут B, так як один вектор входить у вершину B, а один виходить з неї; таким чином, ми визначили зовнішній кут при вершині B трикутника ABC). Оскільки $\angle ABC$ є прямим, то трикутник є прямокутним. Площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку катетів:

$$AB=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6},\ BC=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14},$$

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}=\sqrt{21}.$$

Якщо учні вивчають векторний добуток (поглиблений рівень), доцільно обчислити векторний добуток векторів-сторін. Площа трикутника дорівнює половині модуля векторного добутку двох будь-яких векторів-сторін трикутника.

2 спосіб. Обчислимо довжини сторін трикутника, визначимо найбільшу сторону (потенційну гіпотенузу) та перевіримо виконання теореми Піфагора: $AB=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6},\ BC=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}$, $AC=\sqrt{4^2+0^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. Оскільки $\sqrt{6}<\sqrt{14}<\sqrt{20}$, то AB і BC – потенційні катети, AC – гіпотенуза. Неважко переконатися, що $AB^2+BC^2=AC^2$. А тоді $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}=\sqrt{21}$.

Відповідь: трикутник прямокутний, $S=\sqrt{21}$ кв. од.

Задача 11. Доведіть, що трикутник з вершинами у точках $A(6;-1;5)$; $B(1;2;-3)$; $C(8;2;-1)$ гострокутний.

Розв'язання.

1 спосіб. Обчислимо довжини сторін:

$$AB=\sqrt{(-5)^2+3^2+(-8)^2}=\sqrt{25+9+64}=\sqrt{98}=7\sqrt{2},\quad BC=\sqrt{7^2+0^2+2^2}=\sqrt{49+4}=\sqrt{53},$$

$$AC=\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7.$$

Найбільшою стороною є AB. Оскільки $AB^2<BC^2+AC^2$ $(98<53+49)$, то трикутник гострокутний.

<u>2 спосіб</u>. Обчислимо вектори $\overline{AB}=(-5;3;-8),\ \overline{AC}=(2;3;-6),\ \overline{BC}=(7;0;2)$. Обчислимо скалярні добутки векторів, які <u>*виходять*</u> з вершин трикутника $(\overline{AB}\cdot\overline{AC})=(-5;3;-8)\cdot(2;3;-6)=-10+9+48>0$, $\angle BAC$ є гострим, бо скалярний добуток є додатним, обидва вектори виходять з вершини A);

$(\overline{BA}\cdot\overline{BC})=(5;-3;8)\cdot(7;0;2)=35+0+16>0$, $\angle ABC$ є гострим;

$(\overline{CB}\cdot\overline{CA})=(-7;0;-2)\cdot(-2;-3;6)=14+0-12>0$, $\angle ACB$ є гострим. Усі кути трикутника є гострими, він є гострокутним.

Відповідь: трикутник ABC є гострокутним.

Задача 12. Чи є серед кутів трикутника ABC з вершинами у точках $A(2; 7; –4)$; $B(5; 1; –2)$; $C(6; –1; 4)$ тупий кут?

Розв'язання.

<u>1 спосіб</u>. Обчислимо довжини сторін:

$AB=\sqrt{3^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{9+36+4}=\sqrt{49}=7$, $BC=\sqrt{1^2+(-2)^2+6^2}=\sqrt{1+4+36}=\sqrt{41}$,

$AC=\sqrt{4^2+(-8)^2+8^2}=\sqrt{16+64+64}=\sqrt{144}=12$.

Найбільшою стороною є AC. Оскільки $AC^2>BC^2+AC^2$ (144 > 49 + 41), то кут навпроти сторони AC, тобто $\angle ABC$ є тупим, трикутник тупокутний.

<u>2 спосіб</u>. Обчислимо вектори $\overline{AB}=(3;-6;2),\ \overline{AC}=(4;-8;8),\ \overline{BC}=(1;-2;6)$. Обчислимо скалярні добутки векторів, які виходять з вершин трикутника $(\overline{AB}\cdot\overline{AC})=(3;-6;2)\cdot(4;-8;8)=12+48+16>0$, $\angle BAC$ є гострим;

$(\overline{BA}\cdot\overline{BC})=(-3;6;-2)\cdot(1;-2;6)=-3-12-12<0$, $\angle ABC$ є тупим. Далі рахувати непотрібно, трикутник є тупокутним.

Відповідь: так, серед кутів трикутника є тупий кут – $\angle ABC$.

Наведемо приклад конкурсної задачі із завдань Всеукраїнської студентської олімпіади з математики (м. Львів, 2017 р.), яка розв'язується засобами векторної алгебри і розв'язання якої доступне школярам:

Задача № 13. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-1985}+\sqrt[4]{2017-x}=4$.

Розв'язання. Враховуючи нерівність Коші-Буняковського маємо:

$$\sqrt[4]{x-1985}+\sqrt[4]{2017-x}=\overline{(1;1)}\cdot\left(\sqrt[4]{x-1985};\sqrt[4]{2017-x}\right)\le\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt[4]{x-1985})^2+(\sqrt[4]{2017-x})^2}=$$
$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{x-1985}+\sqrt{2017-x}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(1;1)(\sqrt{x-1985};\sqrt{2017-x})}\le\sqrt{2}\times$$
$$\times\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{x-1985}^2+\sqrt{2017-x}^2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x-1985+2017-x}}=$$
$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4.$$

Зн

ак рівності досягається за умови колінеарності і співнапрямленості векторів, співмножників скалярного добутку, а це можливо, лише при $x - 1985 = 2017 - x$, звідки $x = 2001$.

Відповідь: $x = 2001$.

Висновки та перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження. Відмітимо, що розв'язування таких задач у старшій профільній школі сприяє поглибленню знань школярів з геометрії і може бути використане для підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання та у позакласній роботі.

Наведені приклади – це частина задач з шкільного курсу геометрії і вчитель зможе внести корективи у викладений матеріал в залежності від підготовки учнів, їх здібностей і інтересів. Розглянутий матеріал корисно використати для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

Список використаної літератури

1. Апостолова Г.В., Ясінський В.В. Геометрія старшокласникам і абітурієнтам. – Київ: Факт, 2006. – 88 с.
2. Бурда М.І. Структура і зміст профільного навчання математики //Математика в школі. – 2007. – №7. – С. 3-6.
3. Зеленяк О.П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Paskal / О.П. Зеленяк. – Киев, Москва: ДиаСофтЮП, ДМК Пресс, 2008. – 336 с.